119 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

On va présenter quatre actions différentes. Pour chacune, on veut :
- pour une matrice donnée, on veut trouver un représentant sympathique dans son orbite. Ceci fournira des critères pour savoir si deux matrices sont semblables ou équivalentes.
- on veut trouver des invariants pour ces actions, qui caractériseront les orbites.
- étudier la topologie des orbites.

I) <u>Action par multiplication à gauche</u> [Gri]

1) <u>Présentation de l'action</u>

Motivation : système linéaire AX=b. Faire des opération sur les lignes et les colonnes revient à multiplier A et b par des matrices P inversibles. On fait donc agir GLn(K) sur Mn,p(K) x Mn,1(K) par multiplication à gauche. On restreint l'action à Mn,p(K). On note S_A,b l'ensemble des solutions du système. Le but est de trouver une matrice B plus « simple » dans l'orbite. On a alors PA=B. Si on note b'=Pb, on vérifie que S_{A,b}=S_{B,b'}.

Prop : GLn(K) agit sur Mn(K) par multiplication à gauche.

Prop : A=PB ssi KerA=KerB [?] *(en effet, un sens facile. L'autre : notons F=KerA=KerB et G un supplémentaire. (e1,…,er) une base de F, (er+1,…en) base de G. On note fr+i=Aer+i, et gr+i=Ber+i. (fr+1,…,fn) et (gr+1,…,gn) sont libres car on a appliqué A et B sur un supplémentaire du noyau. On complète ces bases en (fi), (gi). Soit P la matrice qui passage de (fi) à (gi). On veut montrer que A et PB coïncident sur (ei). (PBe1,…,PBer)=(0,…,0), et (Ae1,…,Aer)=(0,…,0). Maintenant, (PBer+1,…,PBen)=(Pgr+1,…,Pgn)=(fr+1,…,fn). Or (Aer+1,…,Aen)=(fr+1,…,fn). C'est bon.)*

2) <u>Matrices échelonnées</u>

Déf : matrice échelonnée (les zéros sont strictement croissants), matrice échelonnée réduite (le 1er coeff non nul de chaque ligne est un 1 et il y a que des éros au dessus et au dessous)

Prop : dans toute orbite se trouve une matrice échelonnée (pivot de Gauss). Mais il n'y a clairement pas unicité. En modifiant un peu le pivot de Gauss, on montre que toute orbite contient une matrice échelonnée. Unicité ?

Th : chaque orbite contient une UNIQUE matrice échelonnée réduite [?] *(on suppose qu'il existe deux matrices ER U,V tq U=PB, V=P'B. On a alors U=CV avec C=In. On note lj le j-ième vecteur de In, pareil pour vj, uj, cj. On montre par récurrence sur k que les k premières colonnes de U et V sont les k premières colonnes de l'Id, et que les k-1 premières colonnes de C sont les k-1 premières colonnes de l'Id, quitte à supprimer les colonnes correspondantes. Ex : le premier vecteur de U et de V est l_1, du coup c1=l1 aussi, donc toutes les colonnes proportionnelles à l1 de V sont égales à celles de U, donc on peut les virer, et la première colonne de V non proportionnelle à l1 est l2, et du coup c'est pareil pour U etc)*

Cor : A=PB ssi A et B ont même matrice échelonnée réduite

II) <u>Action par équivalence</u> [BMP] + [MT] + [Gou]

K un sous corps de C

1) <u>Présentation de l'action</u>

Action 1 : GLn x GLm agit sur M_n,m

Cor : deux matrices sont dans la même orbites ssi elles sont équivalentes

2) <u>Invariants totaux de l'action</u> [BMP 155]

Th : A une matrice de rang r. Alors A est équivalente à J_r [BMP 155] + [Cog 152] *(le th de la base incomplète est crucial)*

Cor : A et B dans M_n,p(K). A équivalente à B ssi rg(A)=rg(B) [BMP 155]

Les orbites sont donc entièrement déterminées par le rang, que ce soit sur R ou sur C. On verra que ce n'est pas si simple pour la relation de similitude. Un représentant sympa de chaque orbite est J_r.

Appl : A est équivalente à tA [BMP 155]

Appl : GL(K) dense dans M(K) [BMP 155] *(on prend A dans M(K), A de rang r, A=PJ_rQ, on pose A_p=P(J_r+1/p*Id)Q, les A_p sont inversibles et convergent vers A)*

Appl : toute matrice de M(K) est somme de deux matrices inversibles [BMP 155] *(si K infini, on prend A=(A-l*Id)+l*Id où l non nul et non valeur propre. Si K fini et #K>2, pour l différent de 0 et 1, si A est de rang r on écrit A=P(J_r-l*Id)Q+lPQ)*

3) Etude topologique des orbites [MT] + [Gou]

Prop : r<min(n,m). Alors O_r est une partie connexe de Mn(K) (K=R ou C) *(csq de la connexité de GLn(C) et GLn+(R))* [MT 36]

Prop : clôture d'une orbite [Gou 188]

Cor : le rang est une application semi continue inférieurement. Si A_k est une suite de matrices de rang r qui converge vers A, alors rg(A) est plus petit que r.

Cor : la seule orbite fermée est O_0={0}, et la seule ouverte est O_min(n,m)

III) Action par conjugaison [Gou]

K=C

1) Présentation de l'action

Prop : GLn agit sur Mn par conjugaison

Prop : deux matrices sont dans la même orbite ssi elles sont conjuguées

2) Des représentants normaux des orbites [Gou]

Déf : A est dite diagonalisable (resp trigonalisable) si il existe une matrice diagonale (resp triangulaire) dans O_A.

Th : E hermitien. A normale => A diagonalisable [Gou 258]

Th : E euclidien ; réduction d'une matrice normale [Gou 258] *(idée : on découpe E en sev de dim 1 ou 2 stables par u et u*)*

Th : tableau avec représentant canonique. Colonnes : type de matrice/représentant sympathique.
Les matrices de Sn(R) et Hn(C) sont semblables à une matrice diagonale réelle.
Les matrices de Un(C) sont semblables à une matrice diagonale dont les termes sont des exp(i_a_k).
Les matrices de An(C) sont semblables à une matrice diagonale avec des imaginaires purs.
Les matrices de An(R) sont semblables à une matrice diagonale par blocs de taille 2.
Les matrices de On(R) aussi, avec des 1 des -1 et des blocs de rotations. [Gou 244 à 262]

Corollaire de la réduction de U(n) et SO(n) : ils sont connexes par arc [Aud 66] *(pour SO(n) : il suffit de relier toute matrice à l'identité. Le nb de -1 est pair, on les regroupe deux par deux en les écrivant comme une matrice de rotation avec theta=Pi. Donc la matrice a que des blocs de rotations et des 1. On remplace theta par t* theta, et le chemin t->B(t) mène de Id à la matrice)*

3) Invariants totaux [Gou]

Dans tout ce qui suit on travaille dans Mn(C).

Th : décomposition de Dunford [Gou 193]

Action sur Dn(C)

Th : A, B diagonalisables. A et B semblables ssi même poly caract.

Action sur Nn(C)

On considère un endomorphisme nilpotent.

Prop : suite de noyaux emboîtés. Elle s'essouffle. On peut y associer un tableau de Young.

*La suite des noyaux croit en s'essoufflant. L'indice à partir duquel elle devient constante est la multiplicité dans le polynôme minimal. Par exemple, si Ker(A)=Ker(A²), 0 est racine simple dans le polynôme minimal. On en déduit que A est diagonalisable ssi Ker(A-lambda*Id)²= Ker(A-lambda*Id) pour tout lamba. Le nb de cases dans la première colonne du tableau est le degré du polynôme minimal (ie l'indice de nilpotence)*

Th : tout endomorphisme nilpotent admet une représentation en bloc de Jordan dans une bonne base. *On part d'un supplémentaire du dernier K_r différent de l'espace entier, et on en prend une base. Par récurrence, pour j qcq, on construit un supplémentaire de K_{j-1} dans K_j…Voir cours GC.*

Prop : deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même tableau de Young. En particulier, il y a unicité de la réduction de Jordan.

Csq : on peut dénombrer le nombre d'orbites dans le cône nilpotent, c'est le nombre de tableau de Young à n cases, càd le nb de partitions de n, noté p(n) [Nou 174] *p(n) est le coeff de t^n dans le produit infini des 1/(1-t^i)*

Maintenant, u est un endomorphisme quelconque.

Th : Jordan pour matrice quelconque

Th : polynôme caract + tableaux de Young = invariants totaux de similitude. Autrement dit, A et B sont semblables ssi A et B ont mêmes vp et si toute valeur propre l et tout entier positif k, dim(Ker(A-l*Id)^k)=dim(Ker(B-l*Id)^k) *(se servir de Dunford)*

Appl : M est semblable à sa transposée sur Mn(C) [Gou 201] *(il suffit de montrer qu'un bloc de Jordan est semblable à sa transposée. Pour ça, on réorganise les vecteurs de la base de Jordan et ça marche)*

D'après le th de Jordan, il y a une infinité de classes de similitudes sur Mn(C) car deux matrices au polynôme caract différent ne seront pas semblables, et il y a une infinité de pol caract possible. Par contre, pour un poly caract fixé, il y a un nb fini d'orbites.

Appl : dénombrement des classes de similitude de matrices pour un polynôme caractéristique donné *(égal à p(k_1)*…*p(k_r) si les k_i sont les dim des SEC)*

Prop : matrices semblables sur C ssi semblables sur R [Gou 158] *(reste vrai pour toute extension L/K)*

Csq : les orbites sur R sont données par l'intersection des orbites sur C avec Mn(R).

4) Etude topologique des orbites [Gou]

Prop : sur C, une classe de similitude est connexe *(image de GLn(C) par P->PAP^-1)*

Prop : A dans Mn(C) est diagonalisable ssi l'orbite de A est fermée [Gou 191] *qui montre que A est semblable à une matrice triangulaire avec des petits termes hors diagonale*

Dans la suite, on étudie les orbites de l'action de GLn(C) sur les matrices nilpotentes.

Déf et prop : ordre de Chevalley, ordre élémentaire. L'ordre élémentaire engendre l'ordre de Chevalley.

Th : clôture d'une orbite.

Cor : la seule orbite fermée est l'orbite nulle. La seule orbite ouverte est l'orbite maximale.

5) Et sur R ?

Prop : deux matrices réelles sont GLn(C) semblables ssi elles sont GLn(R) semblables.

Csq : si on a deux matrices réelles A et B, on regarde leur réduction de Jordan dans C ; si ces deux matrices de Jordan sont identiques, alors A et B sont semblables sur R. Autrement dit, l'orbite de A sur R est l'intersection de l'orbite de A sur C avec Mn(R).

IV) Action par congruence [Szp]

1) Présentation de l'action

Déf :

Déf : deux fq q et q' sont dites équivalentes s'il existe u dans GL(E) tq q=q'ou. Ceci est équivalent à dire qu'il existe P dans GL(E) tq A_q=tPA_q'P (ie que A_q et A_q' sont congrues).

Rq : deux fq sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action de GLn(R) sur Sn(R) par congruence.

Prop : même orbite => même rang

Prop : Mn=Sn+An, stables par l'action

2) Action sur Sn [Szp 79]

a) Sur un corps algébriquement clos [Szp 80]

Th : il y a n+1 classes d'équivalence décrites par les matrices Ir. OA=OB ssi rg(A)=rg(B).

Cor : il existe une base o.n pour q ssi elle est non dégénérée.

b) Sur R

Déf : une forme quadratique est dite définie si son cône isotrope est trivial, positive si pour toux x, q(x)≥0, définie positive si pour tout x non nul, q(x)>0. Une fq dp est appelée produit scalaire, et (E,q) est appelé espace euclidien.

Th : les classes d'équivalences sont décrites par les matrices Ip,q,r=(I_p,-I_q,0_n-r). On appelle alors (p,q) la signature d'une fq.

Cor : il y a r+1 classes d'équivalences de fq de rang r (donc en tout 1+2+3+…+n+1=(n+1)(n+2)/2 classes d'équivalence.

Cor : il existe une base orthonormale ssi q est définie positive.

Prop : calcul de la signature : q une fq non dégénérée. A une matrice représentative de q, P son poly caract. v (resp v') le nb de changements de signe dans P(x) (resp dans P(-x)). Alors sgn(q)=(v,v') [Mig 210]

c) Sur Fq

Action sur matrices de rang n

Th : sur Fq, les classes d'équivalences sont représentées par les matrices I_r et les matrices (I_r-1,a,0), où a n'est pas un carré dans Fq. Il y a donc 2n+1 classes d'équivalence *(attention le pas de récurrence est pas facile)*

Appl : loi de réciprocité quadratique [Caldero]

3) Action sur An

[Szp 96] Invariant = rang. Le rang est forcément pair.

Remarques sur la leçon :
- ne parler que des matrices sur R ou C et pas sur un anneau principal.
- pas parlé du fait que pour les projecteurs, classes d'équivalences et classes de conj sont confondues.
- toute classe de similitude sur C contient une matrice symétrique [Mneimné p.130]. Pour R, voir section 17.7. (appl de Jordan)
- les classes de similitude bornées sont finies (conjuguer par Id+a*E_i,j, mq toutes les matrices de l'orbite sont diagonales, il y en a donc un nb fini et comme c'est connexe c'est juste un point).
- invariants de similitude
- opération sur les lignes et les colonnes
- http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/RREF1.pdf pour les matrices échelonnées réduites

Développements :
1 - Action de Steinitz [Gou 188] + [MT 36] + [Cog 152] (***)
2 - Réduction de Jordan [???] (**)
SO3(C) isomorphe à PSL_2(C) [???] (***)

Biblio :
[Gou] Gourdon - Algèbre
[BMP] Objectif agrégation
[MT] Mneimné Testard
[Caldero]
[Gri] Grifone
[Sep] Szpirglas

Rapport du jury :
C'est une nouvelle leçon, qui préfigure de futures leçons sur les actions linéaires de groupes (finis) sur des espaces vectoriels.